جامعة البعث	امتحان مقرر المعادلات التفاضلية(1)	الاسم:
كلية العلوم	للسنة الثانية رياضيات الفصل الدراسي الأول	المدة:
قسم الرياضيات	لعام 2017-2018م.	الدرجة:

السؤال الأول (20درجة):

جد الحل العام للمعادلة التفاضلية التالية :

$$\acute{y} + 2xy = 2x\, e^{-x^2}$$

السؤال الثاني (20درجة):

جد الحل الخاص للمعادلة التفاضلية التالية وفق الشروط المعطاة:

$$\acute{y} = \frac{y}{x} + \sin\frac{y}{x} \qquad , \qquad y(1) = \frac{\pi}{2}$$

السؤال الثالث (20درجة):

برهن أن $\frac{1}{x^2+y^2}$ هو عامل تكميل للمعادلة التفاضلية التالية :

$$(x + y)dx + (\,y - x\,)dy = 0$$

ثم جد الحل العام للمعادلة التامة وجميع عوامل التكميل لها .

السؤال الرابع(20درجة):

جد الحل العام ديكارتيا للمعادلة التفاضلية التالية المحلولة بالنسبة لـ X :

$$Y^2\acute{Y}^3 + 2X\acute{Y} - Y = 0$$

السؤال الخامس(20درجة):

جد الحل العام للمعادلة التفاضلية التالية :

$$X\acute{\acute{Y}} + \acute{Y} = 2X$$

حمص2018/1/28م. مع تمنياتي لكم بالنجاح والتوفيق د.ميسون زين الدين

سلم تصحيح مقرر المعادلات التفاضلية (1)
للسنة الثانية رياضيات الفصل
الدراسي الأول لعام ٢٠١٧/٢٠١٨ م

جواب السؤال الأول (٢٠):

$$y' + 2xy = 2x e^{-x^2}$$

معادلة خطية غير متجانسة نأخذ المتجانسة منها:

$$y' + 2xy = 0 \Rightarrow \int \frac{dy}{y} = -2\int x\,dx \Rightarrow \ln\frac{y}{c} = -x^2 \Rightarrow$$

(10) $\boxed{y = c e^{-x^2}}$ (*)

لنوجد قيمة c نشتق (*) باعتبار c متحول:

$$y' = c' e^{-x^2} - 2cx e^{-x^2} \quad (**)$$

نعوض كل من (*) و(**) في المعادلة المعطاة:

$$c' e^{-x^2} - 2cx e^{-x^2} + 2cx e^{-x^2} = 2x e^{-x^2} \Rightarrow c' = 2x \Rightarrow$$

$$c = x^2 + c_1$$

نعوض c في (*) نحصل على الحل العام:

(10) $\boxed{y = x^2 e^{-x^2} + c_1 e^{-x^2}}$

جواب السؤال الثاني (٢٠):

$$y' = \frac{y}{x} + \sin\frac{y}{x} \; ; \; y(1) = \frac{\pi}{2}$$

بالتعويض كل y بـ λy وكل x بـ λx تختصر الـ λ وتبقى الدالة $f(x)$ كما هي
فالمعادلة متجانسة في x و y لذلك نجري التحويل $z = \frac{y}{x} \Leftarrow y = xz$

نعوض في المعادلة:

(10) $\Rightarrow y' = z + xz'$

$$z + xz' = z + \sin z \Rightarrow \int \frac{dz}{\sin z} = \int \frac{dx}{x} \Rightarrow$$

$$\ln\left|\tan\frac{z}{2}\right| = \ln|x| + \ln c \Rightarrow \tan\frac{z}{2} = cx \Rightarrow$$

$$z = 2\arctan cx \Rightarrow \boxed{y = 2x \arctan cx}$$ الحل العام

لنوجد الحل الخاص:

(10) $\frac{\pi}{2} = 2\arctan c \Rightarrow c = \tan\frac{\pi}{4} = 1$

$$\boxed{y = 2x \arctan x}$$

جواب السؤال الثالث (٢٠):

نلاحظ أن $\frac{1}{x^2+y^2}$ عامل تكميل فنضرب المعادلة به:

$$\frac{x+y}{x^2+y^2}\,dx + \frac{y-x}{x^2+y^2}\,dy = 0 \quad (1)$$

تابع جواب السؤال الثالث:

نوجد:

$$\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x} = \frac{(x^2+y^2) - 2y(x+y)}{(x^2+y^2)^2} =$$

$$= \frac{x^2 - 2yx - y^2}{(x^2+y^2)^2}$$

والمعادلة تامة و $\frac{1}{x^2+y^2}$ عامل تكميل للمعادلة.

نوجد الحل العام للمعادلة ① وذلك بتطبيق العلاقة:

$$F(x,y) = \int_{x_0}^{x} P(x,y)\,dx + \int_{y_0}^{y} Q(x_0,y)\,dy = c$$

(10)

وبأخذ $x_0 = 0, y_0 = 1$ نجد:

$$F(x,y) = \int_0^x \frac{x+y}{x^2+y^2}\,dx + \int_1^y \frac{dy}{y^2} =$$

$$= \frac{1}{2}\ln(x^2+y^2) + \arctan\frac{x}{y} = c$$

وهو الحل العام المطلوب وشكل جميع عوامل التكميل للمعادلة هو:

(10)

$$\frac{1}{x^2+y^2}\,\phi\left(\frac{1}{2}\ln(x^2+y^2) + \arctan\frac{x}{y}\right)$$

جواب السؤال الرابع (أ):

$$y^2 y'^3 + 2xy' - y = 0$$

هي معادلة محلولة بالنسبة لـ x:

$$2x = \frac{y - y^2 y'^3}{y'}$$

نفرض $y' = P$ نجد:

$$2x = \frac{y - y^2 P^3}{P} = \frac{y}{P} - y^2 P^2$$

نشتق بالنسبة لـ y نجد:

(10)

$$2\frac{dx}{dy} = \frac{2}{P} = \frac{P - y\frac{dP}{dy}}{P^2} - 2yP^2 - 2y^2P\frac{dP}{dy} = \frac{1}{P} - \left(\frac{y}{P^2} + 2y^2P\right)\frac{dP}{dy}$$

$$-2yP^2 \Rightarrow$$

بجمع الحدود المتشابهة نحصل على:

$$P(1+2yP^3) = -y(1+2yP^3)\frac{dP}{dy}$$

جواب السؤال الرابع :

بفرض : $1+2yp^3 \neq 0$ نقسم عليه نجد :

$$P=-y\frac{dp}{dy} \Rightarrow \int \frac{dp}{p} = -\int \frac{dy}{y}$$

بالمكاملة نجد :

$$P=\frac{c}{y} \Rightarrow$$

الحل العام وسيطياً :

$$\begin{cases} y=\frac{c}{p} \\ x=\frac{c}{2p^2}-\frac{c^2}{2} \end{cases}$$

والحل العام ديكارتياً :

$$x=\frac{c}{2\frac{c^2}{y^2}}-\frac{c^2}{2} \Rightarrow x=\frac{1}{2}\frac{y^2}{c}-\frac{c^2}{2}$$

(10) $\Rightarrow 2cx = y^2-c^3 \Rightarrow \boxed{y^2-2cx-c^3=0}$

جواب السؤال الخامس (٢٠)

$$xy''+y'=2x$$

لا تحوي المعادلة y نفرض $y'=p \Leftarrow y''=p'$ نعوض :

$$xp'+p=2x \Rightarrow p'+\frac{1}{x}p=2$$

هي معادلة خطية نوجد الحل العام بطريقة أولر لاغرانج :

(15) $\mu=e^{\int\frac{dx}{x}}=e^{\ln x}=x \Rightarrow$

نضرب طرفي المعادلة به :

$xp'+p=2x \Rightarrow (px)'=2x \Rightarrow px=2\int x\,dx \Rightarrow$ بالمكاملة

$px=x^2+c_1 \Rightarrow p=x+\frac{c_1}{x} \Rightarrow y'=x+\frac{c_1}{x}$ بالمكاملة

الحل العام :

(10) $\boxed{y=\frac{x^2}{2}+c_1\ln x+c_2}$

د. ميسون زين الدين